7

Maria Zaharia
Dan Zaharia

GEOMETRIA în gimnaziu

Explicații și rezolvări complete

Editura Paralela 45

CUPRINS

Capitolul I
PATRULATERUL

Lecţia 1. Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Priveşte figura 1 şi observă următoarele caracteristici ale acesteia:

1) oricare trei dintre cele patru puncte A, B, C, D nu sunt coliniare;
2) segmentele AB, CD, respectiv AD şi BC nu se intersectează;
3) figura este reuniunea celor patru segmente: AB, BC, CD, DA.

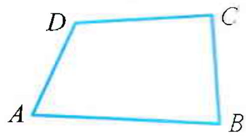

Fig. 1

O astfel de figură se numeşte *patrulater*, iar punctele A, B, C, D se numesc *vârfurile* patrulaterului.

Patrulaterul cu vârfurile A, B, C, D se notează $ABCD$ sau $ADCB$. Ordinea vârfurilor în numirea patrulaterului este de mare importanţă. Ea se stabileşte astfel: se alege un vârf; folosindu-ne de figură, următoarele vârfuri le numim fie în sensul invers rotirii acelor de ceas, fie în sensul rotirii acelor de ceas. De exemplu, dacă se alege vârful B, patrulaterul din figura 1 poate fi numit $BCDA$ sau $BADC$. Prin urmare, un patrulater poate fi numit în 8 moduri.

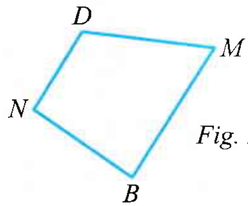

Fig. 2

În figura 2 este reprezentat un patrulater pe care îl putem numi, de exemplu $MDNB$. De asemenea, în figura 3 este reprezentat un patrulater pe care îl putem numi $PQRT$.

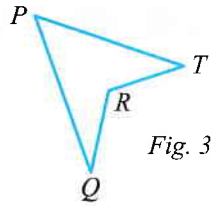

Fig. 3

Patrulaterul $ABCD$ din figura 1 se numeşte *patrulater convex*. Observă că *pentru fiecare dreaptă care conţine o latură, vârfurile patrulaterului, ce nu aparţin acestei drepte, sunt de aceeaşi parte a ei*. De asemenea, $MDNB$ din figura 2 este convex.

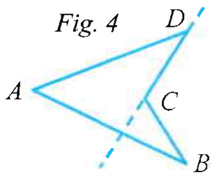

Fig. 4

Patrulaterul $ABCD$ din figura 4 nu este convex, deoarece punctele A şi B sunt de o parte şi de alta a dreptei CD. Un astfel de patrulater se numeşte *patrulater concav*. Patrulaterul $PQRT$ din figura 3 este, de asemenea, concav.

Ne amintim

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°.
Prin urmare, dacă ABC este un triunghi oarecare (figura 5) atunci:
$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$.

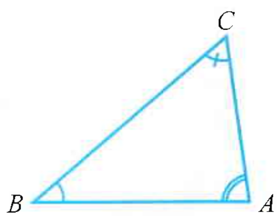

Fig. 5

Rezolvăm împreună şi descoperim noţiuni noi

Calculează suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex.
Rezolvare:
Construim un patrulater convex $ABCD$ (figura 6).
Atunci suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC este egală cu:
$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180°$ şi suma măsurilor unghiurilor triunghiului ADC este egală cu: $\sphericalangle CAD + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCA = 180°$.

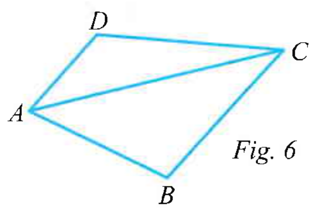

Fig. 6

Adunând cele două egalități termen cu termen, rezultă:
$\sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle DCA = 180° + 180° = 360°$, de unde, observând că $\sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB$ și $\sphericalangle BCA + \sphericalangle DCA = \sphericalangle DCB$, rezultă $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCB = 360°$.
Prin urmare: suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°.

Reține!

- Elementele unui patrulater convex *ABCD* (figura 1) sunt:
  - **vârfurile** patrulaterului (punctele *A*, *B*, *C*, *D*);
  - **laturile** patrulaterului (segmentele *AB*, *BC*, *CD*, *DA*);
  - **unghiurile** patrulaterului ($\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle DAB$);
  - **diagonalele** patrulaterului (segmentele *AC* și *BD*).
- Două laturi care au un punct comun se numesc **laturi consecutive** sau **laturi vecine** (exemplu: laturile *BC* și *CD*).
- Două laturi care nu sunt consecutive se numesc **laturi opuse** (exemplu: laturile *AB* și *CD*).
- Două unghiuri sunt **opuse** dacă nu au în comun o latură a patrulaterului (exemplu: unghiurile *ABC* și *ADC* sunt opuse).
- Ordinea vârfurilor în numirea patrulaterului este importantă.
- Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°.
- Suma lungimilor laturilor unui patrulater este **perimetrul** acestuia.

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.
ABCD este un patrulater convex. Atunci:

a) laturile *AD* și *CB* sunt opuse; A F
b) unghiurile *BAD* și *CBA* sunt opuse; A F
c) segmentul *BC* este o diagonală a patrulaterului. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.
Se consideră un patrulater convex cu unghiul *A* ascuțit și unghiurile *B* și *D* drepte. Atunci:

A. unghiul *C* este ascuțit; B. unghiul *C* este drept;
C. unghiul *C* este obtuz; D. $180° + \sphericalangle C < 270°$.

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.
Se consideră un patrulater convex *ABCD*, în care $A = \sphericalangle 60°$, $B = \sphericalangle 70°$, $\sphericalangle C = 140°$. Măsura unghiului *D* este egală cu:

A. 60°; B. 90°; C. 135°; D. 140°.

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.
Se consideră un patrulater convex *ABCD* (figura 7). Știind că *O* este mijlocul lui *AD*, $AD = 2CD$ și $AB = BC = CD = OC = OB$, atunci:

a) $\sphericalangle BAC =$ 1) 30°;
b) $\sphericalangle BAD =$ 2) 45°;
c) $\sphericalangle BCD =$ 3) 60°;
d) $\sphericalangle ACD =$ 4) 90°;
5) 120°.

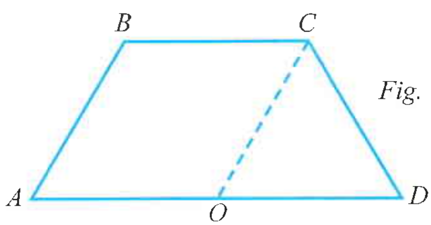

Fig. 7

5. **Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.**
Patrulaterul convex $ABCD$ are unghiurile opuse congruente două câte două. Știind că $\sphericalangle B = 4x + 15°$ și $\sphericalangle D = 6x - 27°$, x este egal cu ...°.

FIXEAZĂ!

6. În patrulaterul convex $ABCD$ din figura 8, $AB \perp AD$, $BC \perp CD$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDB$. Demonstrează că:
a) $AB \equiv BC$; b) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$; c) $BD \perp AC$.

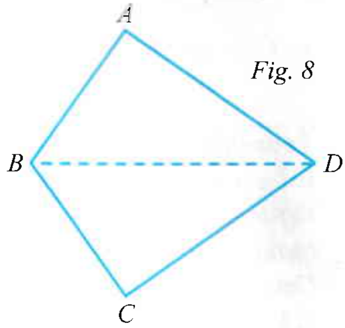

Fig. 8

7. Calculează măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că ele sunt proporționale cu numerele 3, 4, 6 și 7.

8. Punctul O este mijlocul laturii AB a patrulaterului $BTRA$ și segmentele OA, AR, RO, TR și OT sunt congruente. Demonstrează că patrulaterul $BTRA$ are:
a) două laturi paralele; b) două unghiuri alăturate suplementare.

FII CAMPION!

9. Se notează cu M mijlocul laturii BC a unui triunghi ABC. Bisectoarea unghiului AMC intersectează dreapta AC în punctul N. Dacă $AM = MB$, demonstrează că patrulaterul $ABMN$ are două unghiuri drepte.

10. Se consideră un triunghi ABC, cu $\sphericalangle ACB = 40°$. Pe latura AC se fixează punctul E, iar pe latura BC punctul D, astfel încât $CD = CE$. Dacă dreptele AB și DE sunt paralele, demonstrează că patrulaterul $ABDE$ are:
a) unghiurile opuse suplementare; b) două laturi opuse congruente.

Lecţia 2. Paralelogramul. Definiţie şi proprietăţi

Reţine!

- Se numește **paralelogram** patrulaterul care are laturile opuse paralele două câte două.

- *Care sunt proprietățile laturilor, unghiurilor și diagonalelor unui paralelogram?*

Teoreme:

1. Laturile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.

Reformulare (figura 1):

Ipoteza: $ABCD$ – paralelogram;

Concluzia: $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.

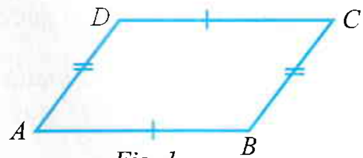

Fig. 1

2. Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.

Reformulare (figura 2):

Ipoteza: $ABCD$ – paralelogram;

Concluzia: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD$.

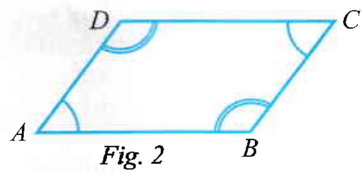

Fig. 2

3. Unghiurile alăturate ale unui paralelogram sunt suplementare.

Reformulare (figura 2):

Ipoteza: $ABCD$ – paralelogram;

Concluzia: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$, $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180°$,
$\sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 180°$ și $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180°$.

4. Punctul de intersecție a diagonalelor unui paralelogram este mijlocul fiecărei diagonale.

Reformulare (figura 3):

Ipoteza: $ABCD$ – paralelogram, $AC \cap BD = \{O\}$;

Concluzia: $OA \equiv OC$ și $OB \equiv OD$.

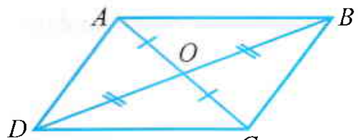

Fig. 3

Observație:

Teorema 4 poate fi enunțată și astfel: *diagonalele unui paralelogram se înjumătățesc.*

- *Ce trebuie să știm despre laturile, unghiurile și diagonalele unui patrulater ABCD, pentru a ne asigura că acesta este paralelogram?*

Teoreme:

5. Dacă laturile opuse ale unui patrulater sunt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 4):

Ipoteza: $AB \equiv CD$, $AD \equiv BC$;

Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.

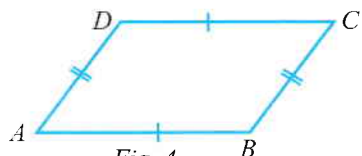

Fig. 4

6. Dacă două laturi opuse ale unui patrulater sunt paralele și congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 5):

Ipoteza: $AB \parallel CD$, $AB \equiv CD$;

Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.

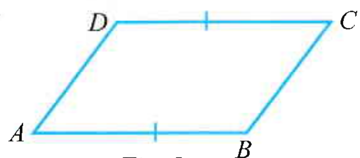

Fig. 5

7. Dacă unghiurile opuse ale unui patrulater sunt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 6):

Ipoteza: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$;

Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.

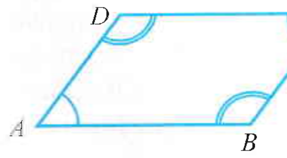

Fig. 6

8. Dacă unghiurile alăturate ale unui patrulater sunt suplementare, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 6):

Ipoteza: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$, $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180°$;

Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.

9. Dacă punctul de intersecție a diagonalelor unui patrulater este mijlocul fiecăreia, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 7):

Ipoteza: $OA \equiv OC$, $OB \equiv OD$;

Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.

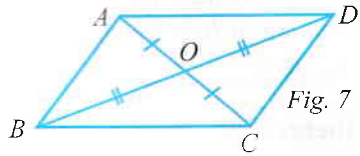

Fig. 7

Observații:

1. Teoremele 1 și 5, teoremele 2 și 7, teoremele 3 și 8, dar și 4 și 9 sunt *teoreme reciproce*.

Conform teoremei 1, *în mod necesar* laturile opuse ale unui paralelogram sunt congruente. Conform teoremei 5, pentru ca un patrulater să fie paralelogram este *suficient* ca laturile opuse să fie congruente. Prin urmare, cele două teoreme se pot reformula astfel: *O condiție necesară și suficientă* ca un patrulater să fie paralelogram este ca laturile opuse să fie congruente. Analog se stabilește că teoremele 2 și 7, teoremele 3 și 8, dar și 4 și 9 pot fi enunțate împreună. Rezultă, astfel, posibilitatea reținerii acestor teoreme și în următoarea formă:

Condiția necesară și suficientă ca un patrulater să fie paralelogram este ca:

– *laturile opuse să fie congruente* sau
– *două laturi opuse să fie paralele și congruente* sau
– *unghiurile opuse să fie congruente* sau
– *unghiurile alăturate să fie suplementare* sau
– *diagonalele să se înjumătățească.*

2. Folosind foaia cu pătrățele poți desena foarte ușor un paralelogram (figura 8). Observă că segmentele AB și CD sunt paralele și congruente, deci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

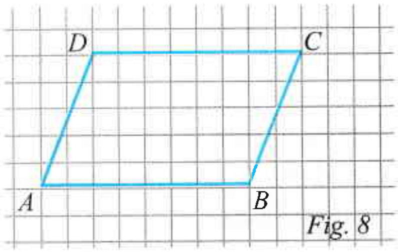

Fig. 8

Reține!

1. Proprietățile paralelogramului:

– laturile opuse sunt paralele;
– laturile opuse sunt congruente;
– unghiurile opuse sunt congruente;
– unghiurile alăturate sunt suplementare;
– diagonalele se înjumătățesc.

2. Pentru a demonstra că un patrulater este paralelogram este suficient să arătăm că este îndeplinită una dintre următoarele condiții:

– patrulaterul are laturile opuse paralele două câte două;
– patrulaterul are două laturi opuse și paralele, și congruente;
– patrulaterul are unghiurile opuse congruente;
– patrulaterul are unghiurile alăturate suplementare;
– diagonalele patrulaterului se înjumătățesc.