



We know
books

Maria Zaharia
Dan Zaharia

GOMETRIA în gimnaziu

Explicații și rezolvări complete

Editura Paralela 45

Capitolul I. PATRULATERUL.....	5
Lecția 1. Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex.....	5
Lecția 2. Paralelogramul. Definiție și proprietăți.....	8
Lecția 3. Aplicații în geometria triunghiului: linie mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi.....	12
Lecția 4. Dreptunghiul. Proprietăți specifice unghiurilor și diagonalelor.....	15
Lecția 5. Rombul. Proprietăți specifice unghiurilor și diagonalelor.....	18
Lecția 6. Pătratul. Proprietăți specifice unghiurilor, laturilor și diagonalelor.....	22
Lecția 7. Trapezul: clasificare, proprietăți. Trapezul isoscel: proprietăți.....	25
Lecția 8. Linia mijlocie în trapez.....	28
Lecția 9. Perimetre și arii: paralelogram, paralelograme particulare, triunghi, trapez.....	31
Lecția 10. Aplicații practice: construcții geometrice cu rigla și compasul.....	37
<i>Recapitulare</i>	40
<i>Evaluare</i>	41
Capitolul II. CERCUL.....	43
Lecția 1. Unghi înscris în cerc.....	43
Lecția 2. Coarde și arce în cerc. Proprietăți.....	48
Lecția 3. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc.....	52
Lecția 4. Poligoane regulate înscrise într-un cerc (construcție, măsuri de unghiuri).....	55
Lecția 5. Lungimea cercului și aria discului.....	59
Lecția 6. Aplicații practice: construcția unor poligoane regulate cu rigla și compasul.....	63
<i>Recapitulare</i>	65
<i>Evaluare</i>	67
Capitolul III. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR.....	69
Lecția 1. Segmente proporționale.....	69
Lecția 2. Teorema paralelelor echidistante.....	72
Lecția 3. Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date.....	77
Lecția 4. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării.....	80
Lecția 5. Criterii de asemănare a triunghiurilor.....	84
Lecția 6. Aplicații ale asemănării.....	87
<i>Recapitulare</i>	91
<i>Evaluare</i>	93

Capitolul IV. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIIUL DREPTUNGHIIC 95

Lecția 1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii. Teorema catetei 95

Lecția 2. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora 100

Lecția 3. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta
unui unghi ascuțit 103

Lecția 4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic 110

Lecția 5. Aplicații: calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral,
în pătrat și în hexagonul regulat 113

Lecția 6. Aplicații practice 118

Recapitulare 121

Evaluare 123

Soluții 125

Lecția 1. Patrulaterul convex.

Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Privește figura 1 și observă următoarele caracteristici ale acesteia:

- 1) oricare trei dintre cele patru puncte A, B, C, D nu sunt coliniare;
- 2) segmentele AB, CD , respectiv AD și BC nu se intersectează;
- 3) figura este reuniunea celor patru segmente: AB, BC, CD, DA .

O astfel de figură se numește *patrulater*, iar punctele A, B, C, D se numesc *vârfurile* patrulaterului.

Patrulaterul cu vârfurile A, B, C, D se notează $ABCD$ sau $ADCB$. Ordinea vârfurilor în numirea patrulaterului este de mare importanță. Ea se stabilește astfel: se alege un vârf; folosindu-ne de figură, următoarele vârfuri le numim fie în sensul invers rotirii acelor de ceas, fie în sensul rotirii acelor de ceas. De exemplu, dacă se alege vârful B , patrulaterul din figura 1 poate fi numit $BCDA$ sau $BADC$. Prin urmare, un patrulater poate fi numit în 8 moduri.

În figura 2 este reprezentat un patrulater pe care îl putem numi, de exemplu $MDNB$. De asemenea, în figura 3 este reprezentat un patrulater pe care îl putem numi $PQRT$.

Patrulaterul $ABCD$ din figura 1 se numește *patrulater convex*. Observă că pentru fiecare dreaptă care conține o latură, vârfurile patrulaterului, ce nu aparțin acestei drepte, sunt de aceeași parte a ei. De asemenea, $MDNB$ din figura 2 este convex.

Patrulaterul $ABCD$ din figura 4 nu este convex, deoarece punctele A și B sunt de o parte și de alta a dreptei CD . Un astfel de patrulater se numește *patrulater concav*. Patrulaterul $PQRT$ din figura 3 este, de asemenea, concav.

Ne amintim

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180° .

Prin urmare, dacă ABC este un triunghi oarecare (figura 5) atunci:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ.$$

Rezolvăm împreună și descoperim noțiuni noi

Calculează suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex.

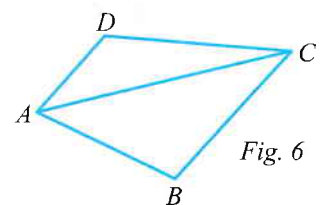
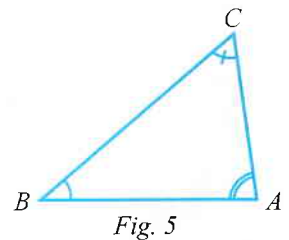
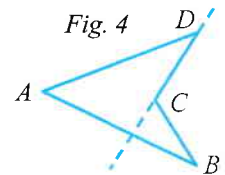
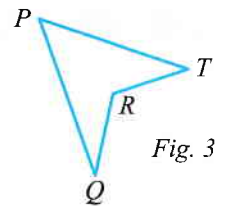
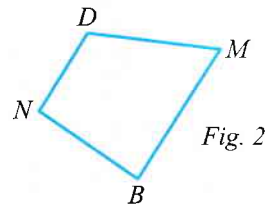
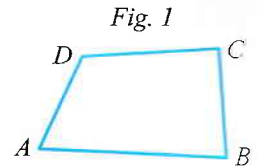
Rezolvare:

Construim un patrulater convex $ABCD$ (figura 6).

Atunci suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC este egală cu:

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180^\circ \text{ și suma măsurilor unghiurilor triunghiului}$$

ADC este egală cu: $\sphericalangle CAD + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCA = 180^\circ$.



Adunând cele două egalități termen cu termen, rezultă:

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle DCA = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ, \text{ de unde, observând că}$$

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB \text{ și } \sphericalangle BCA + \sphericalangle DCA = \sphericalangle DCB, \text{ rezultă } \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCB = 360^\circ.$$

Prin urmare: suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360° .

Reține!

- Elementele unui patrulater convex $ABCD$ (figura 1) sunt:
 - vârfurile patrulaterului (punctele A, B, C, D);
 - laturile patrulaterului (segmentele AB, BC, CD, DA);
 - unghiurile patrulaterului ($\sphericalangle ABC, \sphericalangle BCD, \sphericalangle CDA, \sphericalangle DAB$);
 - diagonalele patrulaterului (segmentele AC și BD).
- Două laturi care au un punct comun se numesc **laturi consecutive** sau **laturi vecine** (exemplu: laturile BC și CD).
- Două laturi care nu sunt consecutive se numesc **laturi opuse** (exemplu: laturile AB și CD).
- Două unghiuri sunt **opuse** dacă nu au în comun o latură a patrulaterului (exemplu: unghiurile ABC și ADC sunt opuse).
- Ordinea vârfurilor în numirea patrulaterului este importantă.
- Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360° .
- Suma lungimilor laturilor unui patrulater este **perimetrul** acestuia.

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

$ABCD$ este un patrulater convex. Atunci:

- | | | |
|--|---|---|
| a) laturile AD și CB sunt opuse; | A | F |
| b) unghiurile BAD și CBA sunt opuse; | A | F |
| c) segmentul BC este o diagonală a patrulaterului. | A | F |

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

Se consideră un patrulater convex cu unghiul A ascuțit și unghiurile B și D drepte. Atunci:

- | | |
|------------------------------|--|
| A. unghiul C este ascuțit; | B. unghiul C este drept; |
| C. unghiul C este obtuz; | D. $180^\circ + \sphericalangle C < 270^\circ$. |

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

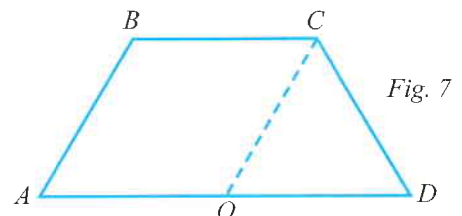
Se consideră un patrulater convex $ABCD$, în care $A = \sphericalangle 60^\circ, B = \sphericalangle 70^\circ, \sphericalangle C = 140^\circ$. Măsura unghiului D este egală cu:

- | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| A. 60° ; | B. 90° ; | C. 135° ; | D. 140° . |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

Se consideră un patrulater convex $ABCD$ (figura 7). Știind că O este mijlocul lui AD , $AD = 2CD$ și $AB = BC = CD = OC = OB$, atunci:

- | | |
|----------------------------|------------------|
| a) $\sphericalangle BAC =$ | 1) 30° ; |
| b) $\sphericalangle BAD =$ | 2) 45° ; |
| c) $\sphericalangle BCD =$ | 3) 60° ; |
| d) $\sphericalangle ACD =$ | 4) 90° ; |
| | 5) 120° . |



5. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

Patrulaterul convex $ABCD$ are unghiurile opuse congruente două câte două. Știind că $\sphericalangle B = 4x + 15^\circ$ și $\sphericalangle D = 6x - 27^\circ$, x este egal cu ...

FIXEAZĂ!

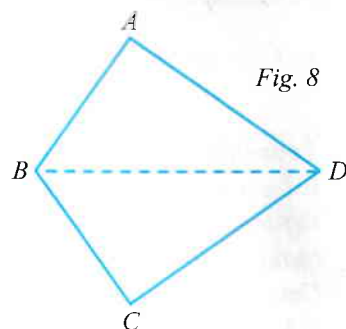
6. În patrulaterul convex $ABCD$ din figura 8, $AB \perp AD$, $BC \perp CD$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDB$. Demonstrează că:

- a) $AB \equiv BC$; b) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$; c) $BD \perp AC$.

7. Calculează măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că ele sunt proporționale cu numerele 3, 4, 6 și 7.

8. Punctul O este mijlocul laturii AB a patrulaterului $BTRA$ și segmentele OA , AR , RO , TR și OT sunt congruente. Demonstrează că patrulaterul $BTRA$ are:

- a) două laturi paralele; b) două unghiuri alăturate suplementare.



FII CAMPION!

9. Se notează cu M mijlocul laturii BC a unui triunghi ABC . Bisectoarea unghiului AMC intersectează dreapta AC în punctul N . Dacă $AM = MB$, demonstrează că patrulaterul $ABMN$ are două unghiuri drepte.

10. Se consideră un triunghi ABC , cu $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Pe latura AC se fixează punctul E , iar pe latura BC punctul D , astfel încât $CD = CE$. Dacă dreptele AB și DE sunt paralele, demonstrează că patrulaterul $ABDE$ are:

- a) unghiurile opuse suplementare; b) două laturi opuse congruente.

Reține!

• Se numește **paralelogram** patrulaterul care are laturile opuse paralele două câte două.

• Care sunt proprietățile laturilor, unghiurilor și diagonalelor unui paralelogram?

Teoreme:

1. Laturile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.

Reformulare (figura 1):

Ipoteza: $ABCD$ – paralelogram;

Concluzia: $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.

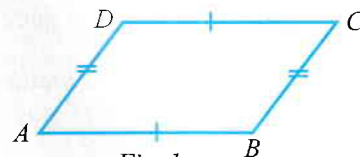


Fig. 1

2. Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.

Reformulare (figura 2):

Ipoteza: $ABCD$ – paralelogram;

Concluzia: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD$.

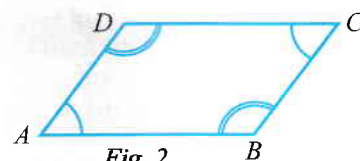


Fig. 2

3. Unghiurile alăturate ale unui paralelogram sunt suplementare.

Reformulare (figura 2):

Ipoteza: $ABCD$ – paralelogram;

Concluzia: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180^\circ$, $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180^\circ$,

$\sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 180^\circ$ și $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180^\circ$.

4. Punctul de intersecție a diagonalelor unui paralelogram este mijlocul fiecărei diagonale.

Reformulare (figura 3):

Ipoteza: $ABCD$ – paralelogram, $AC \cap BD = \{O\}$;

Concluzia: $OA \equiv OC$ și $OB \equiv OD$.

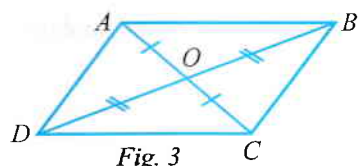


Fig. 3

Observație:

Teorema 4 poate fi enunțată și astfel: *diagonalele unui paralelogram se înjumătățesc.*

• Ce trebuie să știm despre laturile, unghiurile și diagonalele unui patrulater $ABCD$, pentru a ne asigura că acesta este paralelogram?

Teoreme:

5. Dacă laturile opuse ale unui patrulater sunt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 4):

Ipoteza: $AB \equiv CD$, $AD \equiv BC$;

Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.

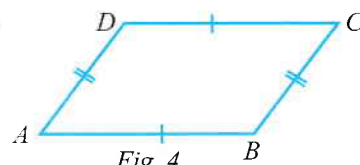


Fig. 4

6. Dacă două laturi opuse ale unui patrulater sunt paralele și congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 5):

Ipoteza: $AB \parallel CD$, $AB \equiv CD$;

Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.

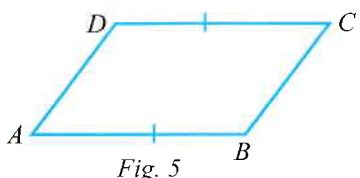


Fig. 5

7. Dacă unghiurile opuse ale unui patrulater sunt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 6):

Ipoteza: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$;

Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.

8. Dacă unghiurile alăturate ale unui patrulater sunt suplementare, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 6):

Ipoteza: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180^\circ$, $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 180^\circ$;

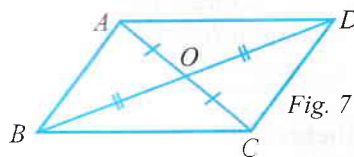
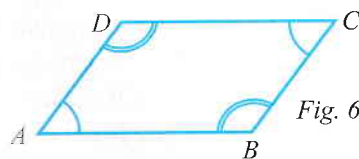
Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.

9. Dacă punctul de intersecție a diagonalelor unui patrulater este mijlocul fiecăreia, atunci patrulaterul este paralelogram.

Reformulare (figura 7):

Ipoteza: $OA \equiv OC$, $OB \equiv OD$;

Concluzia: $ABCD$ – paralelogram.



Observații:

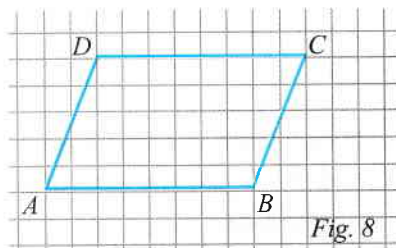
1. Teoremele 1 și 5, teoremele 2 și 7, teoremele 3 și 8, dar și 4 și 9 sunt *teoreme reciproce*.

Conform teoremei 1, în mod necesar laturile opuse ale unui paralelogram sunt congruente. Conform teoremei 5, pentru ca un patrulater să fie paralelogram este *suficient* ca laturile opuse să fie congruente. Prin urmare, cele două teoreme se pot reformula astfel: *O condiție necesară și suficientă* ca un patrulater să fie paralelogram este ca laturile opuse să fie congruente. Analog se stabilește că teoremele 2 și 7, teoremele 3 și 8, dar și 4 și 9 pot fi enunțate împreună. Rezultă, astfel, posibilitatea reținerii acestor teoreme și în următoarea formă:

Condiția necesară și suficientă ca un patrulater să fie paralelogram este ca:

- laturile opuse să fie congruente sau
- două laturi opuse să fie paralele și congruente sau
- unghiurile opuse să fie congruente sau
- unghiurile alăturate să fie suplementare sau
- diagonalele să se înjumătățească.

2. Folosind foaia cu pătrățele poți desena foarte ușor un paralelogram (figura 8). Observă că segmentele AB și CD sunt paralele și congruente, deci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.



Reține!

1. Proprietățile paralelogramului:

- laturile opuse sunt paralele;
- laturile opuse sunt congruente;
- unghiurile opuse sunt congruente;
- unghiurile alăturate sunt suplementare;
- diagonalele se înjumătățesc.

2. Pentru a demonstra că un patrulater este paralelogram este suficient să arătăm că este îndeplinită una dintre următoarele condiții:

- patrulaterul are laturile opuse paralele două câte două;
- patrulaterul are două laturi opuse și paralele, și congruente;
- patrulaterul are unghiurile opuse congruente;
- patrulaterul are unghiurile alăturate suplementare;
- diagonalele patrulaterului se înjumătățesc.